ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»

Факультет автоматики и электромеханики

Кафедра «Автоматизированные и вычислительные системы»

Специальность «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»

**Курсовая работа**

**по дисциплине: Математический анализ**

**Тема: Решение прикладных задач с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений**

Воронеж 2010

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

**ВВЕДЕНИЕ**

Дифференциальное уравнение является одним из основных математических понятий. Дифференциальное уравнение - это уравнение для отыскания функций, производные которых (или дифференциалы) удовлетворяют некоторым наперёд заданным условиям. Дифференциальное уравнение, полученное в результате исследования какого-либо реального явления или процесса, называют дифференциальной моделью этого явления или процесса. Понятно, что дифференциальные модели - это частный случай того множества математических моделей, которые могут быть построены при изучении окружающего нас мира. При этом необходимо отметить, что существуют и различные типы самих дифференциальных моделей. В данной работе будут рассматриваться лишь модели, описываемые так называемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, одной из характерных особенностей которых является то, что неизвестные функции в этих уравнениях зависят только от одной переменной.

Математическое моделирование включает следующие этапы:

. Формулировка задачи реального мира в математических терминах; это и есть построение математической модели.

. Анализ и решение полученной математической задачи.

. Интерпретация математических результатов в контексте первоначальной задачи реального мира, получение ответа на ранее поставленный вопрос.

Математическая модель состоит из списка переменных, которые описывают данную ситуацию, а также одного или нескольких уравнений, связывающих эти переменные, причем эти уравнения должны быть известны или принимаются как выполняющиеся в рамках данной модели. Математический анализ состоит из решения этих уравнений. Наконец, мы применяем полученные математические результаты, чтобы попытаться ответить на первоначально заданный вопрос о реальном мире.

Процесс математического моделирования можно изобразить схематично:

Реальный мир -> Формулировка-> Математическая модель->

Анализ->Результаты->Интерпретация->Реальный мир

В процессе построения обыкновенных дифференциальных моделей (да и не только их) важное, а подчас и первенствующее значение имеет знание той области науки, с которой связана природа изучаемой задачи. Так, например, в механике это могут быть законы Ньютона, в теории электрических цепей - законы Кирхгофа, в теории скоростей химических реакций - закон действия масс и т.д.

Конечно, на практике приходится иметь дело с такими случаями, когда неизвестны законы, позволяющие составить дифференциальное уравнение, и поэтому необходимо прибегать к различным предположениям (гипотезам), касающимся протекания процесса при малых изменениях параметров - переменных. К дифференциальному уравнению тогда приводит предельный переход. При этом, если окажется, что результаты исследования полученного дифференциального уравнения как математической модели согласуются с опытными данными, то это и будет означать, что высказанная гипотеза правильно отражает истинное положение вещей.

Таким образом, становится очевидной необходимость в приёмах и методах, которые позволяли бы, не решая самих дифференциальных уравнений, всё же получать необходимые сведения о тех или иных свойствах решений. Так вот, такие приёмы и методы существуют, и они и составляют содержание качественной теории дифференциальных уравнений, в основе которой лежат общие теоремы о существовании и единственности решений, о непрерывной зависимости от начальных данных и параметров.

**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

При рассмотрении всевозможных физических явлений часто не удаётся непосредственно найти зависимость между величинами, характеризующими эволюционный, т.е. изменяющийся во времени процесс. Аналогичные трудности могут возникнуть и в ситуациях, когда в качестве независимого переменного выступает одна из координат точки или иная переменная величина. Однако во многих случаях можно установить связь между искомыми характеристиками изучаемого явления (функциями) и скоростями их изменения относительно других переменных, т.е. найти уравнения, в которые входят производные неизвестных функций. Такие уравнения называют дифференциальными.

Если неизвестные функции зависят от одного независимого переменного (аргумента), то говорят об обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ), иначе - о дифференциальных уравнениях с частными производными. Далее будут рассматриваться (в основном) свойства и методы решения ОДУ.

Обозначив независимое переменное, производная по которому от искомой функции входит в состав ОДУ, через t, а эту искомую скалярную функцию через x(t), запишем ОДУ в виде

F. (1.1)

Порядок n  N старшей производной в (1.1) называют порядком дифференциального уравнения. Таким образом, (1.1) является обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Определение 1.1. Решением обыкновенного дифференциального уравнения (1.1) в некотором промежутке времени  числовой прямой R называют n раз непрерывно дифференцируемую в этом промежутке функцию x(t), удовлетворяющую при любом  этому уравнению.

Если в (1.1) n = 1, то имеем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка . Во многих случаях его удаётся записать в виде

 (1.2)

Тогда его называют обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной. При n > 1 получаем обыкновенное дифференциальное уравнение высшего порядка.

В (1.1) и (1.2) входит одна искомая функция x(t). В теории ОДУ рассматривают такие же системы уравнений, которые состоят из n обыкновенных дифференциальных уравнений и такого же числа искомых функций.

Если система ОДУ первого порядка разрешена относительно производных:

, (1.3)

то её называют нормальной системой ОДУ. В этом случае число n уравнений, входящих в (1.3), называют порядком нормальной системы ОДУ. Если первые части (1.3) не зависят явно от , то имеем автономную нормальную систему ОДУ.

Рассматривая ) как координатные функции, введём вектор-функцию скалярного аргумента . Аналогично, считая , , координатными функциями векторной функции, представим её в виде .

Тогда (1.3) можно записать в векторной форме

. (1.4)

Определение 1.2. Решением нормальной системы (1.4) ОДУ в некотором промежутке  называют вектор-функцию x(t), определённую и непрерывно дифференцируемую в этом промежутке и при любом  удовлетворяющую этой системе.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка

, (1.5)

разрешённое относительно старшей производной, можно свести к нормальной системе. Действительно, обозначив , получим , и (1.5) примет вид

 (1.6)

;



Процесс нахождения решения ОДУ обычно называют интегрированием дифференциального уравнения. Если решение ОДУ можно получить при помощи конечного числа операций интегрирования и дифференцирования и выразить через элементарные функции, то иногда говорят, что решение дифференциального уравнения получено (или выражено) в квадратурах.

Следует отметить, что ОДУ имеют обычно бесконечное множество решений. Например, нетрудно проверить подстановкой, что при любом значении постоянного числа a функция  является решением ОДУ первого порядка .

Теоремы существования и единственности.

 (1.61)

Теорема существования. Если в уравнении (1.61) функция определена и непрерывна в некоторой ограниченной области плоскости (x,y), то для любой точки  существует решение  начальной задачи

, , (1.62)

определённое на некотором интервале, содержащем точку .

Теорема существования и единственности. Если в уравнении (1.61) функция  определена и непрерывна в некоторой ограниченной области  плоскости , причём она удовлетворяет в области  условию Липшица по переменной , т.е.

,

где  - положительная постоянная, то для любой точки  существует единственное решение  начальной задачи (1.62), определённое на некотором интервале, содержащем точку .

Теорема о продолжении. При выполнении условий теоремы существования или теоремы существования и единственности всякое решение уравнения (1.61) с начальными данными  может быть продолжено до точки, сколь угодно близкой к границе области . При этом в первом случае продолжение, вообще говоря, будет не обязательно единственным, во втором же случае оно единственно.

Геометрическая интерпретация решения ОДУ.

Поле направлений.

Всякое решение ,  ( ) нормальной системы (1.3) ОДУ в интервале Т можно интерпретировать геометрически как кривую Г с координатным представлением





Рис. 1

в (n + 1)-мерном пространстве , точки которого имеют координаты . Это пространство называют расширенным фазовым пространством, а кривую Г - интегральной кривой. Фазовым пространством называют n-мерное пространство  с координатами  точек (, а проекцию на него интегральной кривой - фазовой траекторией (рис 1).

Эта траектория является годографом вектор-функции . Координаты точек ( иногда называют фазовыми переменными. В частном случае  фазовым пространством будет фазовая плоскость, а фазовой траекторией - плоская кривая. В каждой точке некоторой области  расширенного фазового пространства система (1.3) определяет направление, характеризуемое вектором . Первая составляющая этого вектора равна единице, поскольку для первой координаты t точки  расширенного фазового пространства . Построив в каждой точке  вектор s получим в области D множество векторов, называемое векторным полем. В каждой точке  вектор s задаёт направление касательной к проходящей через эту точку интегральной кривой системы (1.3), множество которых называют полем направлений.

Интегрирование системы (1.3) ОДУ можно рассматривать как процесс нахождения кривых, у которых в каждой точке направление касательной совпадает с направлением вектора s (см. рис. 1).

**ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Простейшие обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) рассматривали в своих работах ещё И. Ньютон и Г. Лейбниц. Именно Г. Лейбниц ввёл в 1676 г. термин “дифференциальные уравнения”. Задачу решения ОДУ И. Ньютон трактовал как обратную по отношению к нахождению производной для заданной функции, а вычисление неопределённого интеграла он считал частным случаем этой задачи. Для Ньютона, как создателя основ математического естествознания, такой подход к восстановлению функции по зависимости между функцией и её производными был вполне логичным, поскольку большинство известных в науке закономерностей может быть выражено в форме дифференциальных уравнений.

Пример 1.1. Тело массой m падает под действием силы тяжести mg (g - ускорение свободного падения) и силы сопротивления , пропорциональной скорости v, где k-коэффициент сопротивления. Найти зависимость скорости движения тела от времени t.

Используя второй закон Ньютона, составим ОДУ, описывающее движение тела:

.

Имеем ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной , имеющей механический смысл ускорения движения рассматриваемого тела. Можно проверить подстановкой, что решением этого ОДУ является совокупность функций

,

где  - произвольная постоянная. Если в момент времени  тело начинает падение с начальной скоростью , то , и тогда

.

Кроме того ОДУ имеет, очевидно, решение , к которому стремится при  все решения вне зависимости от значения .



Пример 1.2. Из точки  под углом  к горизонту бросают с заданной начальной скоростью  тело, массой  так, что оно падает под прямым углом на наклонную плоскость, проходящую через точку  и образующую с горизонтом заданный угол . Считая углы  и  острыми (рис. 2), найти угол .

Поместим в точку  начало прямоугольной декартовой системы координат, направив ось абсцисс x вдоль наклонной плоскости. Согласно второму закону Ньютона, уравнения движения тела имеют вид ,

 (1.7)

Это ОДУ второго порядка, разрешённые относительно старшей производной. Они имеют решение

, . (1.8)

В (1.8) входят четыре произвольных постоянных . Поэтому для выбора из бесконечного множества возможных решений единственного решения, описывающего действительное движение рассматриваемого тела, необходимо использовать сведения о положении и скорости этого тела в начальный момент времени , однозначно определяющие эти произвольные постоянные. Так как при  тело находится в начале координат, т.е. , то, согласно (1.8), . Дифференцируя (1.8), получаем

, .

С учётом заданного при  значения  скорости тела имеем

, .

Подставляя найденные выражения для произвольных постоянных в (1.8), запишем

(1.9)



Полученное решение содержит пока ещё неизвестное значение угла . Это значение можно найти, приняв во внимание, что тело падает на наклонную плоскость под прямым углом, т.е. в момент  падения  и проекция скорости тела на координатную ось x равна нулю . Учитывая (1.9), из последнего условия имеем

, или ,

а из первого условия, используя полученное выражение для , имеем



.

Поскольку по смыслу задачи , то равно нулю выражение в квадратных скобках:

.

Отсюда после тригонометрических преобразований получаем

, .



Пример 1.3. Человек, находящийся в точке , движется вдоль оси ординат y в положительном направлении и тянет тяжёлый предмет, расположенный в точке , за верёвку постоянной длины  (рис. 3). Пусть на плоскости xy в начальный момент времени точка  находится в начале координат, а точка  имеет координаты . Составим ОДУ траектории точки .

Обозначим через  уравнение искомой траектории точки .

Из условия задачи следует, что  является касательной к этой траектории в точке  с координатами . Длина отрезка  (см. рис. 3) равна , а . Принимая во внимание геометрический смысл производной , т.е. , получаем ОДУ первого порядка

,

разрешённое относительно производной. Одним из решений этого ОДУ является функция

,

которая задаёт хорошо известную плоскую кривую - трактрису.

Пример 1.4. Кривая погони. Пример использования дифференциальных уравнений для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

Пусть, например, миноносец охотится за подводной лодкой в густом тумане. В какой-то момент времени туман поднимается и подводная лодка оказывается обнаруженной на поверхности воды на расстоянии 3 миль от миноносца. Скорость миноносца вдвое больше скорости подводной лодки. Требуется определить траекторию (кривую погони), по которой должен следовать миноносец, чтобы он прошёл точно над подводной лодкой, если последняя сразу же погрузилась после её обнаружения и ушла на полной скорости прямым курсом в неизвестном направлении.



Для решения сформулированной задачи введём полярные координаты ,  таким образом, чтобы полюс  находился в точке обнаружения подводной лодки, а полярная ось  проходила через точку, в которой в момент обнаружения произвольной лодки был миноносец (рис.4). Дальнейшие рассуждения основаны на следующих соображениях. Прежде всего миноносцу надо занять такую позицию, чтобы он и подводная лодка находились на одном расстоянии от полюса . Затем миноносец должен двигаться вокруг полюса  по такой траектории, чтобы оба движущихся объекта всё время находились на одинаковом расстоянии от точки . Только в этом случае миноносец, обходя вокруг полюса , пройдёт над подводной лодкой. Из вышесказанного следует, что сначала миноносец должен идти прямым курсом к точке  до тех пор, пока он не окажется на том же расстоянии  от полюса , что и подводная лодка.

Очевидно, что расстояние  можно найти либо из уравнения

,

либо из уравнения

,

где  скорость подводной лодки, а  скорость миноносца. Решая последние уравнения, находим, что либо расстояние  равно либо одной, либо трём милям.

Теперь, если «встречи» не произошло, то миноносец должен в дальнейшем двигаться вокруг полюса  (по направлению движения часовой стрелки или против), удаляясь от последнего со скоростью подводной лодки . Разложим скорость миноносца  на две составляющие: радиальную  и тангенциальную  (рис. 4).

Радиальная составляющая - это линейная скорость вращения миноносца относительно полюса , т.е.



Тангенциальная составляющая - это линейная скорость вращения миноносца относительно полюса. Она, как известно, равна произведению угловой скорости  на радиус , т.е.



Но так как , то

.

Итак, решение исходной задачи сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений

, ,

которая в свою очередь может быть сведена к одному уравнению  исключением переменной .

Решая последнее дифференциальное уравнение, получаем, что

, где  - произвольная постоянная.

Учитывая теперь, что миноносец начинает движение вокруг полюса  с полярной оси  на расстоянии  миль от точки , т.е. учитывая, что , приходим к выводу, что в первом случае , а во втором . Таким образом, чтобы выполнить свою задачу, миноносец должен пройти две или шесть миль прямым курсом по направлению к месту обнаружения подводной лодки, а затем двигаться либо по спирали , либо по спирали .

Пример 1.5. Почему маятниковые часы не являются точными?



Чтобы ответить на поставленный вопрос, рассмотрим идеализированную модель маятниковых часов, состоящую из стержня длиной  и гири массой  на его конце (масса стержня предполагается такой, что её можно не принимать в расчёт по сравнению с массой гири) (рис. 5). Если гирю отклонить на угол  и затем отпустить, то в соответствии с законом сохранения энергии

, (1.10)

где  - скорость движения гири, а  - силы тяжести.

Рассматривая только малые отклонения гири от положения равновесия, всегда можно считать, что длина дуги, по которой гиря отклоняется от положения равновесия на угол , определяется равенством . А в этом случае  и соотношение (1.10) приводит к дифференциальному уравнению

 (1.11)

Учитывая теперь, что  убывает с возрастанием  (для малых ), уравнение (1.11) можно переписать в виде



А тогда если  - период колебаний маятника, то



(1.12)

Как видно из последующей формулы, период колебаний маятника зависит от угла . Этот факт и является основной причиной того, что маятниковые часы не точные, ибо практически гиря всякий раз откланяется в крайнее положение на угол, отличный от .

Обращаясь к формуле (1.12) заметим, что её переписать и в более простом виде. Действительно, так как



 (1.13)

где.

Заменим теперь переменную на переменную, полагая. Из последнего равенства следует, что когда возрастёт от 0 до, то возрастёт от 0 до , причём,

Или



Последнее соотношение даёт возможность формулу (1.13) переписать в виде



где функцию



называют эллиптическим интегралом первого рода, в отличие от эллиптических интегралов второго рода, имеющих вид



Эллиптические интегралы не могут быть вычислены в элементарных функциях, и поэтому дальнейшее обсуждение задачи о маятнике мы свяжем с другим подходом, который будет рассматриваться при исследовании консервативных систем в механике. Здесь мы лишь отметим, что исходным пунктом в дальнейших исследованиях будет дифференциальное уравнение



которое получается из уравнения (1.11) дифференцированием по.

Задача 1.6. Шарик, масса которого , нанизан на горизонтальную проволочную круговую петлю радиуса  (рис. 6). Зная коэффициент трения , определить, какую начальную скорость  нужно сообщить шарику для того, чтобы он сделал полный оборот по проволоке и остановился.



Решение. На шарик действуют четыре силы (рис.6): сила тяжести ***Р*** с абсолютным значением  - ускорение свободного падения), центробежная сила ***N*** инерции с абсолютным значением  (- скорость шарика), сила ***N*** реакции проволоки и направленная против его движения сила ***F*** трения. Реакция проволоки уравновешивает силу тяжести и центробежную силу инерции, т.е. абсолютное значение силы ***N***



Тогда абсолютное значение силы трения



Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнение движения шарика в виде



Поскольку , где - расстояние, пройденное шариком

после начала движения, то можно записать



В итоге получаем уравнение движения шарика в виде



Это ОДУ с разделяющимися переменными. После разделения переменных и интегрирования находим



Интеграл в левой части этого равенства подстановкой  можно свести к табличному интегралу, так что приходим к соотношению



По условию,  при . Отсюда . Начальную скорость  шарика найдем из условия  при , т.е.



или (после решения биквадратного уравнения относительно )



Характерно, что значение  и движение шарика не зависит от его массы.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

. Пусть *-* количество бактерий в сосуде. Известно, что производная  - (скорость размножения бактерий) пропорциональна  с коэффициентом пропорциональности . Определить , если в 10 часов в сосуде было 2 000 бактерий, а в 12 часов уже 32 000.

Решение.. Разделяем переменные и интегрируем

,,.



Ответ: 

. Скорость остывания воды в чайнике пропорциональна разности температуры чайника и кухни. Чайник выключился в 10.20 при температуре воды 100С°. В 10.30 температура воды в чайнике была 80 С°. Найти время, за которое температура воды в чайнике будет равна 40 С°, если температура на кухне 20 С°.

Решение.





,







дифференциальный уравнение математический моделирование

Ответ: .

3. Шар  массы  падает свободно без начальной скорости под действием силы тяжести из точки , которую примем за начало координат. Сопротивление воздуха  пропорционально скорости падения, то есть - коэффициент пропорциональности). Найти закон движения шара.

Решение.

. ;

Уравнение - линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению



Найдем решение



Cоставим и найдем частное решение неоднородного уравнения  тогда . Подставим найденные значения в уравнение:



поэтому



и общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

*t*.



 

Частное решение, соответствующее начальным условиям имеет вид

*t*.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Дифференциальные уравнения необходимы для создания математических моделей большинства физических законов. Более того, дифференциальные уравнения можно использовать для вычисления вероятности некоторых событий и даже для построения тактики на поле боя.

Для решения дифференциальных уравнений огромную роль играют теоремы существования и единственности, которые гарантируют законность применения качественных методов теории ДУ для решения задач естествознания и техники. Они являются обоснованием для создания новых методов и теорий.

К настоящему времени разработаны многочисленные методы решения дифференциальных уравнений. Хотя эти методы обладают тем недостатком, что всегда дают лишь какое-то конкретное решение, что сужает возможности их использования, они, тем не менее, широко используются на практике.

Что же касается качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, то, начиная с работ А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова (конец XIX века), в которых были заложены её основы, она интенсивно развивается, и её методы широко используются в процессе познания окружающей нас действительности.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Пискунов Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления / Н.С. Пискунов.- М.: Наука, 2001.Т.2.- 576 с.

. Агафонов С.А. Дифференциальные уравнения / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.-348 с.

. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: «Оникс 21век» «Мир и образование», 2003. Ч. 2.

. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях.